# 1 Variační počet

Trocha terminologie: jako jsme zobrazení z $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a později $\mathbb{R}^d$ (nebo jejich podmnožin) s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ nazývali funkce (reálné či komplexní), zobrazení z Banachových prostorů (případně jejich podmnožin) s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ nazýváme **funkcionály**. Později pak budeme zobrazaní mezi Banachovými prostory nazývat operátory.

Pro funkcionály s hodnotami v $\mathbb{R}$ můžeme definovat lokální i globální extrémy (volné, nebo vzhledem k množině) analogicky jako u funkcí.

## 1.1 Derivování v Banachových prostorech a jeho aplikace

**Definice 1.** *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor, $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ funkcionál, $a \in D_f$, $h \in X \setminus \{0\}$. Potom definujeme* ***Gâteauxovu derivaci*** *$F$ v bodě $a$* ***ve směru*** *$h$ jako*

$$D_h F(a) = \lim_{t \to 0} \frac{F(a + th) - F(a)}{t},$$

*pokud limita napravo existuje vlastní.*

*Spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$ budeme nazývat* ***Gâteauxovou derivací*** *$F$ v bodě $a$ pokud $D_h F(a)$ existuje pro všechna $h \in X \setminus \{0\}$ a platí $L(h) = D_h F(a)$, $h \in X \setminus \{0\}$.*

*Spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$ budeme nazývat* ***Fréchetovou derivací*** *$F$ v bodě $a$ pokud*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a + h) - F(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

*Gâteauxovy a Fréchetovy derivace vyšších řádů definujeme induktivně.*

**Příklady.**

1. *Pro funkcionál $\Phi : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definovaný jako $\Phi(f) = f(0)$ platí $D_h \Phi(f) = h(0) = \Phi(h)$.*

2. *Pro funkcionál $\Phi : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definovaný jako $\Phi(f) = \int_0^1 f$ platí $D_h \Phi(f) = \int_0^1 h = \Phi(h)$.*

3. *Pro funkcionál $\Phi : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definovaný jako $\Phi(f) = (f(0))^2$ platí $D_h \Phi(f) = 2f(0)h(0)$.*

4. *Pro funkcionál $\Phi : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definovaný jako $\Phi(f) = \int_0^1 f^2$ platí $D_h \Phi(f) = \int_0^1 2fh$.*

5. *Obecně, pro funkcionál* $\Phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ *ve tvaru* $\Phi(f) = \int_0^1 G(f)$*, kde* $G \in C^1([0,1])$ *platí*

$$D_h\Phi(f) = \int_0^1 G'(f)h, \quad D_{h,h}\Phi(f) = \int_0^1 G''(f)h^2.$$

**Definice 2** (stacionární bod)**.** *Nechť* $X$ *je normovaný lineární prostor,* $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ *funkcionál. Bod* $a \in D_f$ *nazveme* ***stacionárním*** *(nebo kritickým) bodem* $F$*, pokud* $D_hF(a) = 0$ *pro každé* $h \in X \setminus \{0\}$*.*

**Poznámky a příklady.** 1. *(Eulerova nutná podmínka) Nechť* $X$ *je normovaný lineární prostor,* $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ *funkcionál a* $F$ *má v* $a \in D_F$ *lokální extrém. Pokud pro* $h \in X \setminus \{0\}$ *exsituje* $D_hF(a)$*, potom* $D_hF(a) = 0$*.*

2. *(Lagrangeova nutná podmínka pro extrém) Nechť* $X$ *je normovaný lineární prostor,* $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ *funkcionál a* $F$ *má v* $a \in D_F$ *lokální minimum. Pokud pro* $h \in X \setminus \{0\}$ *exsituje* $D^2_{h,h}F(a)$*, potom* $D^2_{h,h}F(a) \geq 0$*.*

3. *(Lagrangeova postačující podmínka pro extrém) Nechť* $X$ *je normovaný lineární prostor,* $F : X \supset D_F \to \mathbb{R}$ *funkcionál a* $a \in D_F$ *je stacionárním bodem* $F$*. Pokud existuje* $U$ *okolí* $a$*, že pro každé* $h \in X \setminus \{0\}$*a* $x \in U$ *existuje* $D^2_{h,h}F(x)$ *a platí* $D^2_{h,h}F(x) \geq 0$*, potom má* $F$ *a bodě* $a$ *lokální minimum.*